Bizonyítások
Megoldások

1) a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! (11 pont)

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (5 pont)

Megoldás:

a) A differenciálható f függvénynek az $x=1$ akkor lehet szélsőértékhelye, ha itt az első deriváltja nulla (1 pont)
Mivel $f'(x)=3x^2+2kx+9$ (1 pont)
Ezért $f'(1)=3+2k+9=0$ (1 pont)
Innen $\mathbf{k=-6}$ (1 pont)
Erre a k értékre $f'(x)=3x^2-12x+9$ (1 pont)
A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ (2 pont)
Az $x=1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek **lokális maximuma** van (1 pont)
A derivált $x=3$ helyen negatívból pozitívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek lokális minimuma van (1 pont)

b) *Lásd: Függvények – Analízis 7. feladat*

Összesen: 16 pont

2) Adott f és g függvény.

$$f:\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\quad x\mapsto(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin 2x$$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans! (3 pont)

$$g:\quad D_g=[-7;7]\quad x\mapsto x^2-6|x|$$

b) Számítsa ki g függvény zérushelyeit! (3 pont)
c) Adja meg g függvény értékkészletét! (6 pont)

Megoldás:

a) Az értelmezési tartományon minden x esetén

$f(x)=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin 2x=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot\sin 2x=$ (1 pont)

$=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\cdot 2\sin x\cos x=$ (1 pont)

$=\mathbf{2}$ (1 pont)

b) *Lásd: Függvények – Analízis 10. feladat*

c) *Lásd: Függvények – Analízis 10. feladat*

Összesen: 12 pont

3) **Legyen $f(x)=-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám és $x\in\mathbb{R}$.**

a) **Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)\,dx=-a^3+a$!** **(6 pont)**

b) **Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)\,dx\geq 0$?** **(4 pont)**

c) **Az x mely pozitív valós értéke lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvények lokális (helyi) minimuma?** **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az f függvény integrálható.

$$\int_0^a\left(-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a\right)dx=\left[-\frac{x^4}{a}+\frac{x^3}{a}+\frac{x^2}{a}-ax\right]_0^a=$$ (4 pont)

$$=-\frac{a^4}{a}+\frac{a^3}{a}+\frac{a^2}{a}-a^2=$$ (1 pont)

$$=\boldsymbol{-a^3+a}$$ (1 pont)

b) *Lásd: Függvények – Analízis 11. feladat*

c) *Lásd: Függvények – Analízis 11. feladat*

Összesen: 16 pont

4) **Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:**

$$DA: 3x-4y-20=0 \qquad AB: 3x+5y-20=0$$
$$BC: 4x-3y+12=0 \qquad CD: 5x+3y+15=0$$

a) **Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge!** **(8 pont)**

b) **Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög!** **(8 pont)**

Megoldás:

a)

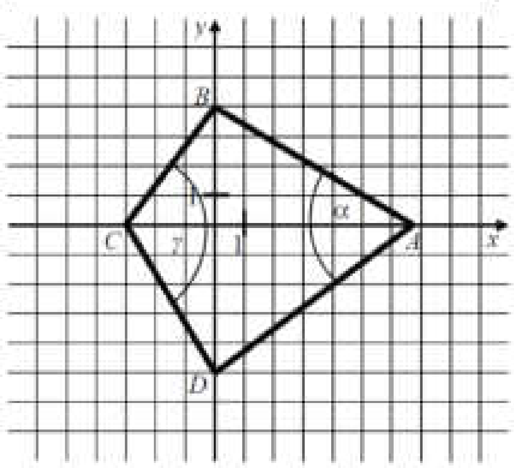
az egyenes	x tengelyen lévő pontja	y tengelyen lévő pontja
$DA: 3x-4y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;-5)$
$AB: 3x+5y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;4)$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(-3;0)$	$(0;4)$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(-3;0)$	$(0;-5)$

A DA és az AB egyenesek metszéspontja az x tengely $A=\left(\frac{20}{3};0\right)$ pontja. (1 pont)

Az AB és a BC egyenesek metszéspontja az y tengely $B=(0;4)$ pontja. (1 pont)

A BC és a CD egyenesek metszéspontja az x tengely $C=(-3;0)$ pontja. (1 pont)

A CD és a DA egyenesek metszéspontja az y tengely $D=(0;-5)$ pontja. (1 pont)



A csúcspontok alapján beláttuk, hogy az *ABCD* négyszög *AC* átlója az *x*, a *BD* átlója pedig az *y* tengelyre illeszkedik (1 pont)

Felírjuk az oldalegyeneseket és egy-egy normálvektorukat (2 pont)

az egyenes	egy normálvektor
$DA: 3x-4y-20=0$	$(3;-4)$
$AB: 3x+5y-20=0$	$(3;5)$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(4;-3)$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(5;3)$

A normálvektorok között és ezért az egyenesek közt sincs két egymásra merőleges (skalárszorzatuk nem 0), ezért az *ABCD* négyszögnek nincs derékszöge (1 pont)

b) Legyen $\gamma = BCD\sphericalangle$ és $\alpha = DAB\sphericalangle$

Vektorok skalárszorzatával fogjuk kiszámítani két szemközti szög koszinuszát. $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}$ (1 pont)

ahol $\overrightarrow{CB}=(3;4)$ és $\overrightarrow{CD}=(3;-5)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=-11$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=5$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{34}$ (1 pont)

$\cos\gamma = -\frac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}$, ahol $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{20}{3};4\right)$ és $\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{20}{3};-5\right)$ (1 pont)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{220}{9}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{\sqrt{544}}{3}$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\frac{25}{3}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \frac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

A γ és az α szögek tehát kiegészítő szögek, az *ABCD* négyszög húrnégyszög. (1 pont)

Összesen: 16 pont

5) Az *A* pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a;\lg b)$; a *B* pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\frac{b}{a}\right)$, ahol *a* és *b* olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a *B* pont mindkét koordinátája nagyobb az *A* pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra! (3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, *b* pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az *A*, illetve *B* pontok halmazát! (6 pont)

Megoldás:

a) Mivel $\lg ab = \lg a + \lg b$, és $\lg \frac{b}{a} = \lg b - \lg a$, így $B(\lg a + \lg b; \lg b - \lg a)$ (1 pont)

Bizonyítandó tehát, hogy $\lg a < \lg a + \lg b$ és $\lg b < \lg b - \lg a$ (1 pont)

rendezés után kapjuk, hogy $\lg b > 0$ és $\lg a > 0$.

A feltételek szerint $0 < a < 1$, illetve $1 < b$, és a tízes alapú logaritmus függvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, valamint $\lg 1 = 0$, **tehát mindkét egyenlőtlenség igaz** (1 pont)

b) $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{BA}(-\lg b; \lg a)$ (1 pont)

Mivel az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektorok skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összege, vagyis

$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = -\lg a \cdot \lg b + \lg b \cdot \lg a = 0$, **tehát a két vektor merőleges egymásra** (2 pont)

c) *Lásd: Koordinátageometria 16. feladat*

d) *Lásd: Koordinátageometria 16. feladat*

Összesen: 16 pont

6) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! **(7 pont)**

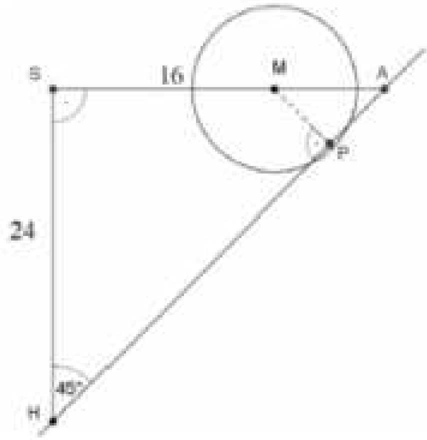
Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra.

A sziget az *S*, a mentőcsónakot az *M*, a tengerjáró hajót a *H* pont jelöli. A hajó útjának és az *SM* egyenesnek a metszéspontját jelölje *A*. (2 pont)



A *HSA* háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért

$AS = 24$ km (1 pont)

$MA = 8$ km (1 pont)

Valamint az *APM* háromszög derékszögű és van 45°-os szöge (1 pont)

Ezért $MP = 4\sqrt{2}\ (\approx 5,7)$ (1 pont)

Mivel $MP < 6$ km, ezért a hajó legénysége észlelheti a jelzéseket. (1 pont)

c) *Lásd: Síkgeometria 15. feladat*

Összesen: 14 pont

7) Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú és derékszögü! (14 pont)

Megoldás:

Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, ezért $\alpha+\gamma=180-\beta$, valamint $\beta+\gamma=180-\alpha$ (1 pont)

és $\cos(180-\beta)=-\cos\beta$, valamint $\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$ (1 pont)

A megadott egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sin\alpha : \sin\beta = \cos\beta : \cos\alpha$ (1 pont)

Ebből a $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos\beta$ egyenlőség következik (1 pont)

A kétszeres szög szinuszára vonatkozó azonosságot használva kapjuk, hogy $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$ (3 pont)

Egy háromszög bármely szög kétszeresének értéke 0° és 360° közé esik, ezért a fenti egyenlőség két esetben áll fenn: (3 pont)

$2\alpha=2\beta$, vagy $2\alpha+2\beta=180$ (2 pont)

Az első esetben $\alpha=\beta$, a háromszög két szöge egyenlő, tehát a háromszög **egyenlő szárú** (1 pont)

A második esetben $\alpha+\beta=90$, a háromszögben $\gamma=90$, a háromszög **derékszögü** (1 pont)

Összesen: 14 pont

8) A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő eljárás relatív hibájának.) (3 pont)

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatát – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott - közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke! (7 pont)

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának az arányát, és legyen $x>1$. Bizonyítandó, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibájának százalékban mérve a következő függvény adja meg:

$$f:]1;+\infty[\to\mathbb{R},\quad f(x)=25\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}.$$

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 4. feladat*

b) Legyen a csonkakúp alapköreinek sugara R és r, magassága m.

A csonkakúp elméleti térfogata: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$ (1 pont)

A csonkakúp gyakorlati térfogata: $\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi$ (1 pont)

A két térfogat különbségéről állítjuk: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)-\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi \ge 0$ (1 pont)

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $\frac{12}{m\pi}$-vel, bontsuk fel a zárójeleket és az összevonások után: $R^2-2Rr+r^2\ge 0$ (2 pont)

Vagyis $(R+r)^2\ge 0$ adódik, ami minden *R* és *r* esetén igaz. (1 pont)

A következtetés minden lépése megfordítható, ezért az állítás igaz (1 pont)

c) Az f függvény deriválható, a deriváltfüggvény hozzárendelési szabálya:

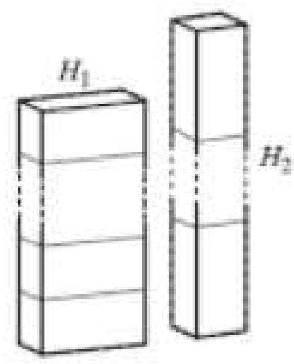
$$f'(x)=25\cdot\frac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)-(x-1)^2(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$ (2 pont)

$$f'(x)=75\cdot\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$ (2 pont)

Az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs megoldása az $]1;+\infty[$ intervallumon, tehát *f*-nek nincs szélsőértéke (2 pont)

Összesen: 16 pont

9) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. AZ építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágok, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}}=0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? **(8 pont)**

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n\in\mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton csökkenő és korlátos! **(8 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 11. feladat*

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3n+5)(4n+1)}{(4n+5)(3n+2)}=$ (1 pont)

$\frac{12n^2+23n+5}{12n^2+23n+10}\left(=1-\frac{5}{12n^2+23n+10}\right)$ (1 pont)

A fenti hányados minden pozitív egész n esetén 1-nél kisebb (1 pont)
a sorozat minden tagja pozitív (1 pont)
ezért a sorozat szigorú monoton csökkenő (1 pont)
Ebből következik, hogy a sorozat felülről korlátos (1 pont)

Mivel a sorozat minden tagja pozitív, így alulról is korlátos (1 pont)
tehát a sorozat korlátos (1 pont)

Összesen 16 pont

10) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)
b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)
c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 21. feladat*
b) *Lásd: Számelmélet 1. feladat*
c) Az ötjegyű számok mindegyikében a számjegyek összege 21 (1 pont)
Tehát a számok oszthatók 3-mal (1 pont)
Mivel 3-mal oszthatóak, ezért csak abban az esetben lehetne köztük négyzetszám, ha az 3 valamely páros kitevőjű hatványa lenne. Ehhez feltétlenül szükséges az is, hogy 9-cel osztható legyen, 9-cel viszont nem osztható egyik sem, **így egyik szám sem lehet négyzetszám.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

11) a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát! (5 pont)

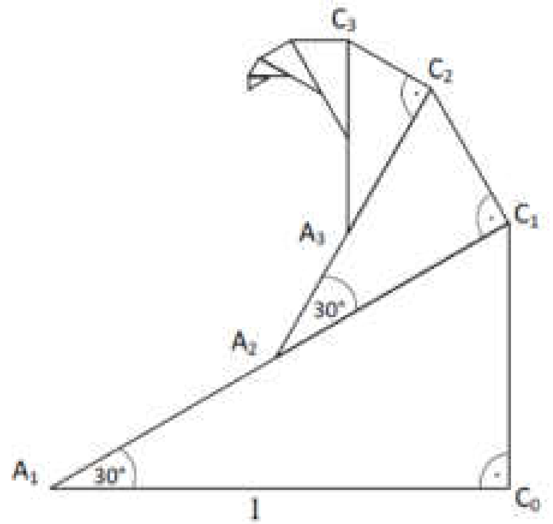
a) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge! (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 10. feladat*
b) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van 60°-os szöge a háromszögnek. (1 pont)
Mivel az oldalak páronként különböző hosszúságúak, és a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, (1 pont)
ezért, ha van 60°-os szöge, akkor az a $4+d$ hosszúságú oldallal szemben van (2 pont)
Erre az oldalra felírva a koszinusztételt:
$(4+d)^2 = 4^2 + (4+2d)^2 - 2\cdot 4\cdot(4+2d)\cdot\cos 60°$ (2 pont)
Ebből $16+8d+d^2 = 16+8d+4d^2$ (1 pont)
Ebből $d^2 = 0$, tehát $d = 0$ (1 pont)
Ez viszont ellentmond annak, hogy a háromszög nem szabályos (2 pont)
Az eredeti feltételezésünk tehát hamis, azaz a háromszögnek valóban nincs 60°-os szöge. (1 pont)

Összesen 16 pont

12) **Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.**
Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.
Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.
Ez az eljárás tovább folytatható.



a) **Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)!** **(7 pont)**

b) **Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2...C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív n-re kisebb, mint 1,4.** **(9 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Síkgeometria 10. feladat*

b) Jelölje d_n a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát $(n \in \mathbb{N}^+)$, $d_1 = C_0C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

A hasonlóság miatt minden $n > 0$ esetén $d_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}$ (1 pont)

A $\{d_n\}$ sorozat tehát olyan mértani sorozat, (1 pont)

amelynek első tagja és hányadosa is $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

Vizsgáljuk az $S = d_1 + d_2 + ... + d_n$ összegeket. A $d_1 + d_2 + ... + d_n...$ olyan mértani sorozat, menynek hányadosa $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tehát van határértéke (1 pont)

Az $\{S_n\}$ sorozat határértéke (a mértani sor összege): $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (1 pont)

$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ és mivel $\sqrt{3}$ kisebb, mint 1,8 ezért $\{S_n\}$ határértéke kisebb, mint 1,4. (1 pont)

az $\{S_n\}$ sorozat szigorúan növekvő (1 pont)

ezért az $\{S_n\}$ sorozat egyetlen tagja sem lehet nagyobb a határértékénél (1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ **(4 pont)**

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ **(4 pont)**

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ **(4 pont)**

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1{,}5\cos x\right)}$ **(4 pont)**

Megoldás:

a) A nevező nem lehet 0, ezért $2^{x-1}-2\neq 0$ (1 pont)

ebből $x\neq 2$ (1 pont)

A továbbiakban a tört akkor 0, ha számlálója 0, tehát $2x^2+x-10=0$, azaz $x_1=2$ és $x_2=-2{,}5$ (1 pont)

Így az egyenletnek csak egy valós megoldása van: $\boldsymbol{x=-2{,}5}$ (1 pont)

b) A rendezés után kapott $\sqrt{x+16}=5-\sqrt{x-9}$ egyenletet mindkét oldalról négyzetre emelve, (1 pont)

rendezés után kapjuk, hogy $10\sqrt{x-9}=0$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{x=9}$ (1 pont)

Behelyettesítéssel ellenőrizve ez jó megoldás. (1 pont)

c) A logaritmus értelmezése szerint: $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$ (1 pont)

Az első egyenlet megoldásai azon x valós számok, amelyekre $x<-3$ vagy $x>2$ (1 pont)

a másodiké: $-1<x<1$ (1 pont)

A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme, így az egyenletnek nincs megoldása. (1 pont)

d) A jobb oldali kifejezés az értelezési tartományán csak nem negatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$. (1 pont)

Ez csak $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ esetén teljesül (1 pont)

De mivel $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén (1 pont)

és nullára a logaritmus nincs értelmezve, **így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, így nincs megoldása.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

14) a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! **(6 pont)**

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni?

(Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha *a, b, c, d* pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az *a, b, c, d* hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

Megoldás:

a) Legyen a négyszög legkisebb szöge α fok, a sorozat differenciája pedig d fok $(d \geq 0)$. Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) $\alpha, \alpha+d, \alpha+2d$ és $\alpha+3d$ fok nagyságúak. (1 pont)

A négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért $4\alpha+6d=360$, (1 pont)
vagyis $2\alpha+3d=180$. (1 pont)

$2\alpha+3d=(\alpha+d)+(\alpha+2d)$, ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege 180°. (1 pont)

Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz, (1 pont)
ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög.
Tehát az **állítást igazoltuk.** (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 23. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 34. feladat*

Összesen: 16 pont

15) a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé! (6 pont)

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza *p*, a másiké pedig *q* $(p>0, q>0)$. (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+g^3\right)^2}$. (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege! (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a két test felszíne egyaránt A, akkor $V_{\text{kocka}}^2=\dfrac{A^3}{6^3}$, (2 pont)

$V_{\text{gömb}}^2=\dfrac{A^3}{36\pi}$ (2 pont)

Mivel $36\pi<6^3$, (1 pont)
ezért **a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka térfogatánál.** (1 pont)

b) Az összeolvasztással kapott kocka térfogata p^3+q^3, ezért élének hossza $\sqrt[3]{p^3+q^3}$, (1 pont)

felszíne tehát $6\cdot\left(\sqrt[3]{p^3+q^3}\right)^2$, ami valóban $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2}$ -nel **egyenlő.** (1 pont)

c) A bizonyítandó állítás: $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+q^3\right)^2}<6\cdot\left(p^2+q^2\right)$ (1 pont)

Mindkét oldalt 6-tal osztva és köbre emelve (az x^3 függvény szigorú monotonitása miatt): $\left(p^3+q^3\right)^2<\left(p^2+q^2\right)^3$. (1 pont)

Elvégezve a hatványozásokat: $p^6+2p^3q^3+q^6<p^6+3p^4q^2+3p^2q^4+q^6$. (2 pont)

Rendezve és a pozitív p^2q^2 szorzattal osztva: $0<3p^2+3q^2-2pq$. (1 pont)

$0<2p^2+2q^2+\left(p-q\right)^2$, (1 pont)

ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon két pozitív és egy nemnegatív szám összege áll). (1 pont)

Minden átalakítás ekvivalens volt, így a bizonyítandó állítás is **igaz.** (1 pont)

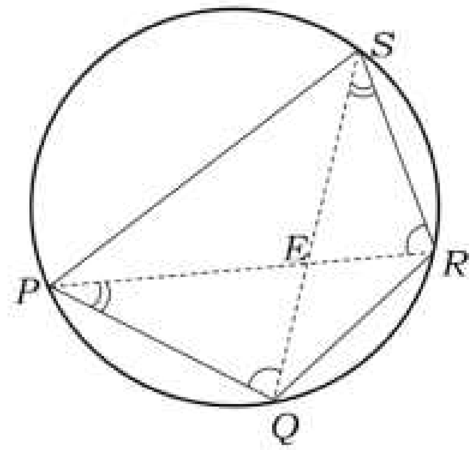
Összesen: 16 pont

16) a) A *PQRS* húrnégyszöget a *PR* és a *QS* átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)

Az *ABCD* húrnégyszög *AB* oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög *BC* oldala 3 cm, a *CD* oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\sphericalangle=120°$.

b) Számítsa ki a négyszög *BD* átlójának, *AB* oldalának és *AD* oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)

Megoldás:



a) Az átlók metszéspontját jelölje *E*. A kerületi szögek tétele miatt $PQS\sphericalangle=PRS\sphericalangle$ és $QPR\sphericalangle=QSR\sphericalangle$ (azonos ívhez tartozó kerületi szögek). (2 pont)

A *PEQ* és az *SER* háromszögekben két-két szög megegyezik (így a harmadik is), ezért ez a két háromszög hasonló. (1pont)

Ugyanígy bizonyíthatjuk a *QER* és a *PES* háromszögek hasonlóságát is. (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 26. feladat*

Összesen 14 pont

17) a) Ha $a\,|\,b$ igaz, akkor $a\,|\,b^2$ is teljesül (*a* és *b* pozitív egész számok). Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! ($a\,|\,b$ azt jelenti, hogy az *a* egész szám osztója a *b* egész számnak.) (3 pont)

b) Hány olyan *n* pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan *p* (pozitív) prímszám, amelyre az n^2-pn különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő? (7 pont)

Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk" a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!(2 pont)

d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan! (4 pont)

Megoldás:

a) Az állítás megfordítása: ha $a \mid b^2$ igaz, akkor $a \mid b$ is teljesül (a és b pozitív egész számok). (1 pont)

Az állítás hamis. (1 pont)

Megfelelő ellenpélda (például $a = 4$ és $b = 2$). (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 7. feladat*

c) *Lásd: Gráfelmélet 7. feladat*

d) *Lásd: Gráfelmélet 7. feladat*

Összesen: 16 pont

18) A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99? (3 pont)

b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot! (4 pont)

c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege $n^3 \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$.

(9 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Számelmélet 8. feladat*

b) *Lásd: Számelmélet 8. feladat*

c) Az első $(n-1)$ oszlopban $1+2+3+...+(n-1) =$ (1 pont)

$= \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ darab szám van. (1 pont)

Az n-edik oszlop első száma az $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2} + 1 = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$-edik páratlan szám,

(1 pont)

ennek értéke $2 \cdot \dfrac{n^2 - n + 2}{2} - 1 = n^2 - n + 1$. (1 pont)

Az n-edik oszlop utolsó száma ennél $(n-1) \cdot 2$-vel több, (1 pont)

azaz $n^2 + n - 1$. (1 pont)

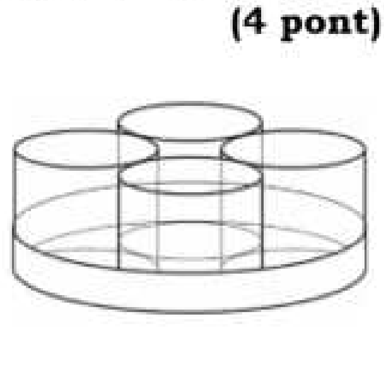
(A számtani sorozat összegképletét alkalmazva) az n-edik oszlopban álló számok összege: $\dfrac{\left(n^2 - n + 1\right) + \left(n^2 + n - 1\right)}{2} \cdot n =$ (2 pont)

$= \boldsymbol{n^3}$. Ezzel az állítást igazoltuk. (1 pont)

Összesen: 16 pont

19) a) Az *ABCD* négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan *P* pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$. (4 pont)

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharakat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



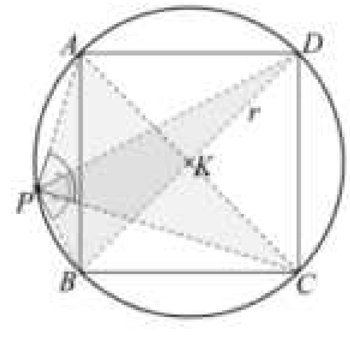
b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél! **(5 pont)**

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő? **(4 pont)**

Megoldás:

a) (*AC*, illetve *BD* a kör egy-egy átmérője, ezért) a Thalész-tétel miatt $APC\sphericalangle = 90^\circ$ és $BPD\sphericalangle = 90^\circ$. (2 pont)



(A körülírt kör sugarát *r*-rel jelölve, a Pitagorasz-tétel miatt) $AP^2 + CP^2 = AC^2 = (2r)^2$ és $BP^2 + DP^2 = BD^2 = (2r)^2$. (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2}$, ami a bizonyítandó volt. (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 28. feladat*

c) *Lásd: Térgeometria 28. feladat*

Összesen: 13 pont

20) a) Határozza meg a *c* számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{lc28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye *p*, további számjegyei pedig rendre *q*, *r*, és *s*.) **(7 pont)**

b) Igazolja, hogy nincs olyan *n* pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal! **(2 pont)**

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden *n* pozitív egész szám esetén osztható 9-cel! **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Számelmélet 9. feladat*

b) A $4^n + 6n - 1$ összeg minden pozitív egész *n* esetén páratlan (mert az összegnek egy páratlan tagja van), (1 pont)

tehát **sohasem osztható 8-cal**. (1 pont)

c) (Teljes indukciót alkalmazunk.) Ha $n = 1$, akkor az állítás igaz, mert a 9 osztható 9-cel. (1 pont)

Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy *k* pozitív egész számra, azaz $4^k + 6k - 1$ osztható 9-cel. (1 pont)

Ekkor igazolnunk kell, hogy az állítás igaz $k+1$-re is, azaz $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ is osztható 9-cel. (1 pont)

$4^{k+1} + 6(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 6k + 5 = 4 \cdot (4^k + 6k - 1) - 18k + 9$ (2 pont)

$4 \cdot (4^k + 6k - 1)$ az indukciós feltevés szerint, a $-18k$, illetve a 9 pedig nyilvánvalóan osztható 9-cel, (1 pont)

ezért ezek összege (azaz a $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$) is osztható 9-cel. (**Ezzel az állítást igazoltuk**.) (1 pont)

Összesen: 16 pont

21) a) Határozza meg $\dfrac{x}{y}$ értékét, ha $\dfrac{2x+3y}{4x+3y} = \dfrac{9}{10}$ $(y \neq 0,\ y \neq -2x)$. **(3 pont)**

b) Legyen $f(x) = x^2 - 11x + 30$.

Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor $\dfrac{f(x+1)}{f(x+1)} = \dfrac{x-4}{x-6}$. **(5 pont)**

c) **Oldja meg az $\frac{x-4}{x-6} \le -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!**

(5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenletrendszerek 9. feladat*

b) $f(x+1)=(x+1)^2-11(x+1)+30=x^2-9x+20$ (2 pont)

Szorzattá alakítunk: $x^2-9x+20=(x-4)(x-5)$, (1 pont)

és $x^2-11x+30=(x-5)(x-6)$. (1 pont)

Ha $f(x)\neq 0$, azaz $x \notin \{5;6\}$, akkor $\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x-4)(x-5)}{(x-5)(x-6)}=\frac{x-4}{x-6}$ (1 pont)

c) *Lásd: Egyenletek, egyenletrendszerek 9. feladat*

Összesen: 13 pont

22) Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot? (3 pont)

b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat: $y=-\frac{1}{5}x+200$ $(0<x<1000)$. (4 pont)

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.) (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 28. feladat*

b) Ha lineáris kapcsolat van az egységár (x) és az eladott barack mennyisége (y) között, akkor $y=mx+b$. (1 pont)

A feladat szövege alapján (mivel a 200-nak a fele 100, a 70%-a pedig 140):
$100=500m+b$ és
$140=300m+b$. (1 pont)

A két egyenletet kivonva egymásból: $-40=200m$, tehát $\boldsymbol{m=-\frac{1}{5}}$, (1 pont)

majd visszahelyettesítve $\boldsymbol{b=200}$. (Tehát valóban $y=-\frac{1}{5}x+200$.) (1 pont)

e) *Lásd: Függvények - Analízis 37. feladat*

Összesen: 14 pont

23) A római katonák az úgynevezett taxillus-szal játszottak „kockajátékot". (A taxillus a kecske vagy a juh térdkalácsából faragott csontocska; ld. a képen.)

Dobás után egy taxillus négy különböző oldalára eshetett. Jelölje ezt a négy különböző helyzetet *A*, *B*, *C* és *D*. Az egyes dobáskimenetelek nem voltak egyformán valószínűek: az *A*, illetve a *B* helyzet egyaránt $\frac{4}{10}$, a *C*, illetve a *D* helyzet pedig egyaránt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel következett be.

A rómaiak általában négy taxillust dobtak fel egyszerre. A Venus-dobás volt az egyik legértékesebb, ekkor a négy csontocska mindegyike más-más oldalára esett. (Rényi Alfréd: Levelek a valószínűségről.)

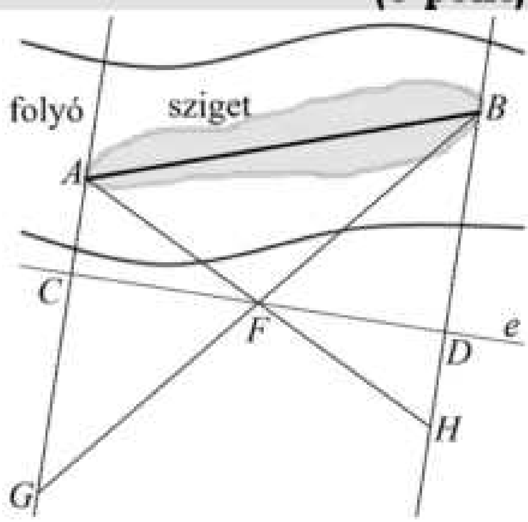
a) Mennyi a Venus-dobás valószínűsége? (5 pont)

b) Az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

I. Négy feldobott taxillus között lesz olyan, amelyik *C* helyzetben érkezik le.

II. Négy feldobott taxillus között pontosan egy érkezik le az *A* helyzetben. (5 pont)

Thalész, a hét görög bölcs egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget *AB* hosszát a folyóparton maradva határozta meg.



Először felvett egy *e* egyenest a parton. Ezen az *e* egyenesen megkereste azt a *C*, illetve *D* pontot, amelyekben a *CA*, illetve a *DB* irány merőleges az *e* egyenesre. Ezután a *CD* szakasz *F* felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az *AC* egyenesen haladva megjelölte azt a *G* pontot, amelyre *B*, *F* és *G* egy egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az *AF* és *BD* egyenesek *H* metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a *GH* távolsággal egyezik meg.

c) Igazolja Thalész állításának helyességét! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Valószínűségszámítás 46. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 46. feladat*

c) $GCF_\triangle \cong BDF_\triangle$, mert $CF = FD$, és egyenlők a *CF*, illetve *FD* oldalukon fekvő szögeik is. (1 pont)

Hasonlóan $ACF_\triangle \cong HDF_\triangle$ (mert $CF = FD$, és egyenlők a *CF*, illetve *FD* oldalukon fekvő szögeik is). (1 pont)

Fentiek miatt $AF = FH$ és $BF = FG$, vagyis az *ABHG* négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást. (1 pont)

Az *ABHG* négyszög tehát paralelogramma, (1 pont)

ezért $AB = HG$, Thalész állítása tehát valóban igaz. (2 pont)

Összesen: 16 pont

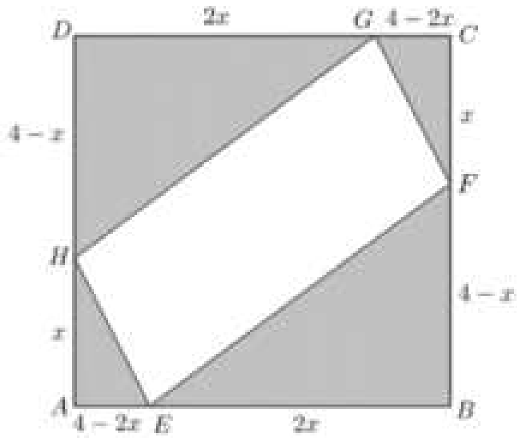
24) **Az *ABCD* négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az EFGH paralelogrammát írjuk. Az *AH* és *CF* szakasz hossza x méter, a *BE* és *DG* szakasz hossza $2x$ méter $(0 < x < 2)$.**

a) **Igazolja, hogy a beírt paralelogramma hossza (m^2-ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$.** **(4 pont)**

b) **Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!** **(4 pont)**

c) **Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1,25$.** **(6 pont)**

Megoldás:



a) A paralelogramma területét megkapjuk, ha az ABCD négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét. (1 pont)

$BF = DH = 4 - x$ és $AE = CG = 4 - 2x$.

$$T(x) = 16 - 2 \cdot \frac{x(4-2x)}{2} - 2 \cdot \frac{2x(4-x)}{2} \quad \text{(1 pont)}$$

$$T(x) = 16 - 4x + 2x^2 - 8x + 2x^2 \quad \text{(1 pont)}$$

Összevonás után $\boldsymbol{T(x) = 4x^2 - 12x + 16}$, ami a bizonyítandó állítás volt.

(1 pont)

b) *Lásd: Függvények - Analízis 38. feladat*

c) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 10. feladat*

Összesen: 14 pont

25) **A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosoknak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.**

a) **Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!** **(3 pont)**

b) **Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos!** **(6 pont)**

c) **Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú "szó" létezik.)** **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 11. feladat*

b) Hárombetűs szóért (a képlet alapján) 2 pont jár, és ez több, mint a kétbetűs szóért járó 1 pont. (1 pont)

Legyen $f(n) = \frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ (ahol $n \geq 3$ és $n \in \mathbb{N}$).

Igazolni kell, hogy $f(n+1) > f(n)$. (1 pont)

$f(n+1) = \dfrac{(n+1)^2 - 5(n+1) + 10}{2} = \dfrac{n^2 - 3n + 6}{2}$, (1 pont)

az $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{2} > \dfrac{n^2 - 5n + 10}{2}$ egyenlőtlenséget (ekvivalens lépésekkel) átrendezve $n > 2$ adódik.

Ez ($n \geq 3$ miatt) teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy hosszabb szóért több pont jár. (1 pont)

Mivel $n^2 - 5n = n(n-5)$ két ellentétes paritású tényező szorzata, ezért páros, tehát $f(n)$ egész szám. (2 pont)

c) Megmutatjuk, hogy az $\dfrac{n^2 - 5n + 10}{2} = 2 + \dfrac{m(m+1)}{2}$ egyenletnek minden $m \in \mathbb{N}$ paraméter esetén van megoldása az $n \geq 3$ egészek körében. (1 pont)

Nullára rendezve: $n^2 - 5n + (6 - m - m^2) = 0$. (1 pont)

A megoldóképletet felírva:

$n_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6 - m - m^2)}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1 + 4m + 4m^2}}{2}$. (1 pont)

A négyzetgyök alatti kifejezés (a diszkrimináns) teljes négyzet, így $n_{1,2} = \dfrac{5 \pm (1 + 2m)}{2}$. (1 pont)

Az egyenlet gyökei tehát $3 + m$ és $2 - m$. (1 pont)

A 3+m mindig 2-nél nagyobb egész szám (a $2 - m$ pedig soha). (1 pont)

Ezért igaz, hogy tetszőleges m természetes szám esetén a játékos **kaphat** $\mathbf{2 + \dfrac{m(m+1)}{2}}$ **pontot**. (1 pont)

<u>Alternatív megoldás:</u>

Megkeressük m-hez a megfelelő n értéket.
Az első néhány eset táblázatokba foglalva:

m	0	1	2	3	4	5	6	…
$2 + \dfrac{m(m+1)}{2}$	2	3	5	8	12	17	23	…

n (a szó hossza)	0	1	2	3	4	5	6	7
$\dfrac{n^2 - 5n + 10}{2}$	-	-	-	2	3	5	8	12

(1 pont)

A két táblázat alapján az sejthető, hogy az m-hez tartozó pontszámot $n = m + 3$ hosszúságú szóra kapjuk meg ($m = 0$ esetén $n = 3$, $m = 1$ esetén $n = 4$, $m = 2$ esetén $m = 5$ megfelelő, és így tovább). (2 pont)

$\dfrac{(m+3)^2 - 5(m+3) + 10}{2} = \dfrac{m^2 + 6m + 9 - 5m - 15 + 10}{2} =$ (1 pont)

$= \frac{m^2+m+4}{2} = \frac{4+m(m+1)}{2} = 2 + \frac{m(m+1)}{2}.$ (2 pont)

Így az $\boldsymbol{n = m+3}$ valóban minden m esetén **megfelelő választás.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

26)

a) Hány olyan 1000-nél kisebb *p* pozitív egész szám van, amelyre a *p* és a 42 relatív prímek? (6 pont)

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
...										...

A fehér, illetve szürke színű „L” alakú sávokba lévő számok összege:
$\boldsymbol{L_1 = 1,\ L_2 = 2+4+2 = 8,\ L_3 = 3+6+9+6+3 = 27}$

b) Igazolja, hogy $\boldsymbol{L_n = n^3}$. (4 pont)

c) Igazolja, hogy az első *n* pozitív köbszám összege

$$\boldsymbol{K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}.$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Paraméter 25. feladat*

b) Az n-edik L alakú sávban a számok összege
$n + 2n + 3n + \ldots + (n-1)n + n\cdot n + n(n-1) + n(n-2) + \ldots + n\cdot 2 + n =$ (1 pont)
$n\cdot\left((1+2+\ldots+n-1)\cdot 2 + n\right) =$ (1 pont)
$= n\cdot\left(n(n-1)+n\right) =$ (1 pont)
$= n^3$ (1 pont)
Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

c) Teljes indukciót alkalmazunk.

$n = 1$-re az állítás igaz: $K_1 = 1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$. (1 pont)

Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely m pozitív egészre, azaz $K_m = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$.

Be kell látni, hogy az állítás $(m+1)$-re is teljesül, azaz $K_{m+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$. Az indukciós feltevést felhasználva tehát igazolandó, hogy: $\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2+(m+1)^3=\left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$. (2 pont)

Osztunk $(m+1)^2$-nel, majd szorzunk 4-gyel:

$\left(\frac{m}{2}\right)^2+(m+1)=\left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$m^2+4(m+1)=(m+2)^2 \Rightarrow$

$m^2+4m+4=m^2+4m+4$. (2 pont)

A két oldal egyenlő, és ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát **az eredeti állítás** minden pozitív egész n-re **igaz.** (1 pont)

Alternatív megoldás:

A b) feladat megoldása alapján az első n pozitív köbszám összege az első n darab L alakú sávban lévő számok összege, $L_1+L_2+...+L_n$, ami megegyezik a táblázat bal felső $n\times n$ -es részében lévő számok összegével. (2 pont)

$(1+2+3+...+n)+2\cdot(1+2+3+...+n)+...+n\cdot(1+2+3+...+n)=$ (1 pont)

$=(1+2+3+...+n)\cdot(1+2+3+...+n)=$ (1 pont)

$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. (1 pont)

Ezzel az **állítást igazoltuk.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) a) Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja! (4 pont)
Ha egy háromszög két magassága egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a=3$, $b=\sqrt{27}$ és $\beta=2\alpha$.

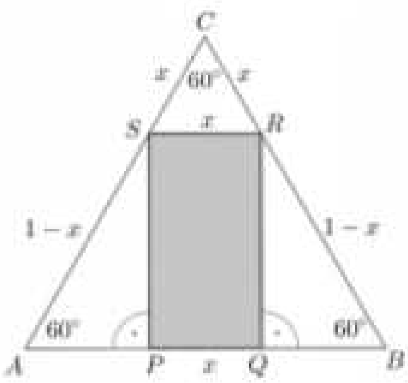
a) Számítsa ki a háromszög szögeit! (5 pont)

Az egységnyi oldalú, szabályos *ABC* háromszögbe olyan *PQRS* téglalapot írunk, melynek *PQ* oldala az *AB* oldalra illeszkedik, *R* a *BC* oldal pontja, *S* pedig a *CA* oldalé.

b) Határozza meg a *PQRS* téglalap területének maximális értékét! (7 pont)

Megoldás:

a) A szokásos jelölésekkel legyen például $m_a=m_b$.



A háromszög területére: $\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{b\cdot m_b}{2}$, (2 pont)

amiből $a=b$ következik. (1 pont)

A háromszög tehát egyenlő szárú, az állítás **igaz**. (1 pont)

Alternatív megoldás:

(A szokásos jelölésekkel) legyen például $m_a=m_b$.

Bármely háromszögben $c\cdot\sin\beta=m_a$ és $c\cdot\sin\alpha=m_b$,

így $c\cdot\sin\beta=c\cdot\sin\alpha$, azaz $\sin\alpha=\sin\beta$. (2 pont)

$\beta=180°-\alpha$ nem lehetséges, mert a háromszög szögeinek összege 180°. (1 pont)

Így $\alpha = \beta$, a háromszög **valóban egyenlő szárú.** (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 37. feladat*

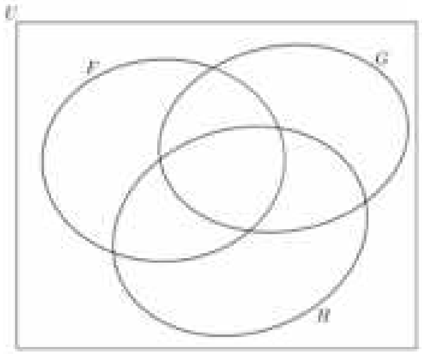
c) *Lásd: Síkgeometria 37. feladat*

Összesen: 16 pont

28) Legyen az *U* alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az *F* halmaz az *U* elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a *G* halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a *H* halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az *U*-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz! (2 pont)

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot! (5 pont)



Egy telephely *K, L, M, N, P, Q* épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha *K* és *L* épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.) (4 pont)

Megrajzoltuk a *ABCDE* konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az *A, B, C, D, E* pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Halmazok 12. feladat*

b) *Lásd: Gráfelmélet 13. feladat*

c) *Lásd: Halmazok 12. feladat*

d) Indirekt bizonyítás. Tegyük fel, hogy nincs olyan háromszög, amelynek mindhárom éle ugyanolyan színű, de az ötszög egyik, például *A* csúcsából kiinduló *AB, AD* és *AD* szakaszok egyforma színűek, például mindhárom zöld.(A bizonyítás szempontjából az *AE* szakasz színe ekkor közömbös.)(1 pont)
A *BCD* háromszög mindhárom oldala nem lehet kék. mert akkor azonos színűek lennének a *BCD* háromszög oldalai. (1 pont)
Ezért a *BC, CD, DB* szakasz közül legalább az egyik zöld színű. Legyen ilyen például a *BC*. (1 pont)
Ekkor azonban az *ABC* háromszög mindhárom oldala zöld, ami ellentmond a kiindulási feltételnek. (1 pont)
Az indirekt feltevés tehát hamis, így **az eredeti állítás igaz**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

29) a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai! (7 pont)

b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$, és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai! (9 pont)

Megoldás:

a) Indirekt bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen n egész szám $(n \geq 3)$. (1 pont)

Ekkor a mértani sorozat tulajdonságai miatt: $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{3} = \binom{n}{2}^2$ (1 pont)

A binomiális együtthatókat kifejtve

$$n \cdot \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$$

majd a törtek egyszerűsítése után:

$$n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$ (2 pont)

Mindkét oldalt $n^2 \cdot (n-1)$-gyel osztva:

$$\frac{n-2}{6} = \frac{n-1}{4}.$$ (1 pont)

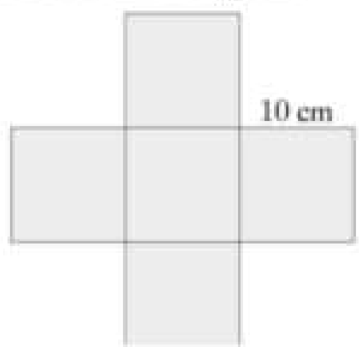
Ebből $n = -1$ adódik. (1 pont)

Ez **ellentmond** az $n > 2$ feltételnek, **tehát valóban nincs** a feltételnek megfelelő egész szám. (1 pont)

b) *Lásd: Sorozatok 29. feladat*

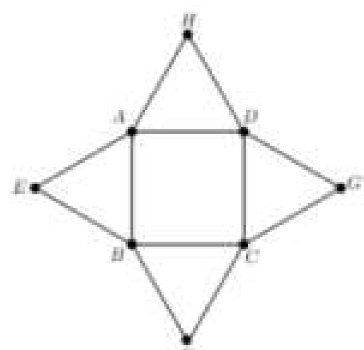
Összesen: 16 pont

30) A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplapja.



a) Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább 200 cm^2, de kevesebb 300 cm^2-nél! (6 pont)

Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.



b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban? (4 pont)

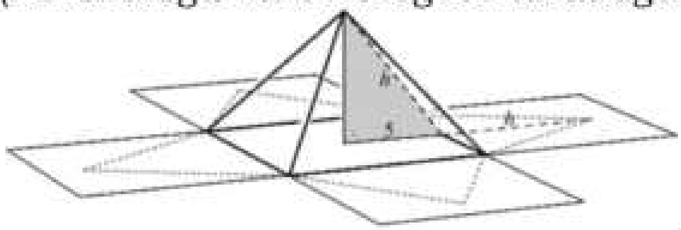
c) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezéssel lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!

Megoldás:

a) A keletkező hulladék akkor minimális, ha az oldallapok területe, és így (alapélhez tartozó) h magassága maximális, azaz 10 cm. (1 pont)

Ekkor a négy oldallap területe $\frac{10 \cdot h}{2} \cdot 4 = 200 \text{ cm}^2$, (1 pont) a hulladék tehát legalább $4 \cdot 10 \cdot 10 - 200 = 200\ \text{cm}^2$. (1 pont)

Minél kisebb az oldallapok magassága, annál több a hulladék. A lapmagasságok merőleges vetülete az alaplapon 5 cm, így $h > 5\,\text{cm}$. (Derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb, mint a befogó.)



(1 pont)

Az oldallapok területösszege:

$\frac{10 \cdot h}{2} \cdot 4 > \frac{10 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 100\ \text{cm}^2$, így (1 pont)

a hulladék kevesebb, mint $4 \cdot 10 \cdot 10 - 100 = \mathbf{300\ cm^2}$. (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 55. feladat*

c) Ha egy n pontú gráfban nincsen kör, akkor legfeljebb n-1 éle lehet. (1 pont)

A kék élek által alkotott részgráfnak legfeljebb 8 csúcsa és 9 éle van, tehát biztosan van benne kör. (2 pont)

***Alternatív megoldás*:**

Az *ADH*, *DCG*, *CBF*, *BAE* háromszögek mindegyik éle pontosan egy háromszöghöz tartozik. (1 pont)

Mivel (4 háromszög és) 3 zöld él van, lesz a háromszögek között olyan, amelynek minden éle kék (és ez egy gráfelméleti kör). (2 pont)

Összesen: 13 pont

31) Adott az $x^2 - (4p+1)x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van! (3 pont)

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke? (4 pont)

c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen! (6 pont)

Megoldás:

a) A másodfokú egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív. (1 pont)

A diszkrimináns: $(4p+1)^2 - 4 \cdot 2p = 16p^2 + 1$. (1 pont)

Ez $\left(p^2 \geq 0 \text{ miatt}\right)$ a p minden valós értékére pozitív, tehát az állítás igaz.

(1 pont)

b) *Lásd: Paraméteres feladatok 14. feladat*

c) *Lásd: Paraméteres feladatok 14. feladat*

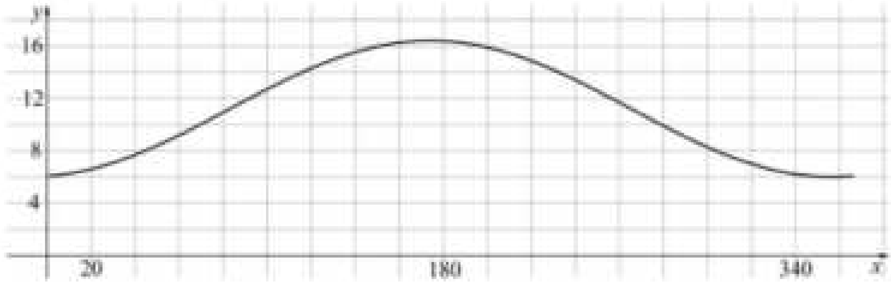
Összesen: 13 pont

32) Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napfelkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5{,}2\cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11{,}2,$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva $(1 \leq n \leq 365,\ n \in \mathbb{N})$.

Az alábbi ábra a $g:[1;365]\to\mathbb{R};\ g(x)=-5,2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11,2$ függvényt szemlélteti.
(A g függvény az f-nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x=1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.
Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve! (2 pont)

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!
Válaszát óra:perc formátumban, egészre kerekítve adja meg! (3 pont)

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb! (7 pont)

Adott egy másik, az $y=-5,2\cos(x)+11,2$ egyenletű görbe, valamint az $x=0$, az $y=0$ és $x=2\pi$ egyenletű egyenesek.

d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények 42. feladat*

b) *Lásd: Függvények 42. feladat*

c) Az $f(n)>12$ megoldásai számának megállapításához először a g függvény értelmezési tartományán oldjuk meg a $-5,2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11,2=12$ egyenletet $(1\le x\le 365,\ x\in\mathbb{R})$.

(Ekkor $0,16\approx\frac{9}{58}\le\frac{x+8}{58}\le\frac{373}{58}\approx 6,43$.) (1 pont)

$\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)\approx -0,1538$ (1 pont)

$\frac{x+8}{58}\approx 1,7253$ vagy $\frac{x+8}{58}\approx 2\pi-1,7253\approx 4,5579$ (2 pont)

Innen $x\approx 92,06$ vagy $x\approx 256,36$. (1 pont)

A g függvény ábrája alapján az $f(n)>12$ megoldásai azok az n-nek, amelyekre $93\le n\le 256$. (1 pont)

A 12 óránál hosszabb nappalok száma tehát $(256-93+1=)$ **164** valóban.

(1 pont)

***Alternatív megoldás*:**

(Az $f(n) > 12$ megoldásai számának megállapításához) először a g függvény értelmezési tartományán oldjuk meg a $-5,2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11,2 > 12$ egyenlőtlenséget $(1 \le x \le 365,\ x \in \mathbb{R})$. (1 pont)

Ez (az adott halmaz) ekvivalens a $\cos\left(\frac{x+8}{58}\right) < -\frac{2}{13}$ egyenlőtlenséggel. (1 pont)

Közelítő értékeket alkalmazva:

$\frac{x+8}{58} \in \left]1,7253+2k\pi;\ 4,5579+2k\pi\right[\ (k \in \mathbb{Z})$.

Így a $\left]92,1+116k\pi;\ 256,3+116k\pi\right[$ intervallumok elemei megoldásai az egyenlőtlenségnek. (2 pont)

$k=0$ esetén a $\left]92,1;\ 256,3\right[$ intervallum a g értelmezési tartományának részhalmaza (ha pedig $k \ne 0$, akkor nincs a g értelmezési tartományához tartozó eleme az intervallumoknak). (1 pont)

Ezért $f(n) > 12$ megoldási azok az n-ek, amelyekre $93 \le n \le 256$. (1 pont)

A 12 óránál hosszabb nappalok száma tehát $(256-93+1=)$ **164** valóban.

(1 pont)

d) *Lásd: Függvények 42. feladat*

Összesen: 16 pont

33) Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a $B(t) = \dfrac{L}{1+\left(\dfrac{L}{B_0}-1\right)\cdot 0,75^t}$ formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve $(0 \le t \le 30)$, L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban $(0 < B_0 < L)$.

Egy nagyvárosban $L = 1,5$ millió, $B_0 = 1000$.

a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal? (3 pont)

b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint? (6 pont)

c) Igazolja, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a $b_n = \dfrac{L}{1+K\cdot 0,75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekedő, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 33. feladat*

b) *Lásd: Sorozatok 33. feladat*

c) (Mindenhol felhasználjuk, hogy a feladat szövege szerint L, K, n pozitív számok.)

A $\{b_n\}$ sorozat alulról korlátos, mert minden tagja pozitív (egy alsó korlát például 0). (1 pont)

A $\{b_n\}$ sorozat felülről is korlátos, mert $\frac{L}{1+K\cdot 0,75^n}<L$ (minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén), hiszen a tört nevezője 1-nél nagyobb. (A $\{b_n\}$ sorozat tehát korlátos.)(2 pont)

A $\{0,75^n\}$ (mértani) sorozat szigorúan monoton csökkenő, ezért az $\{1+K\cdot 0,75^n\}$ sorozat is az. (1 pont)

Ebből következik, hogy az $\left\{\frac{L}{1+K\cdot 0,75^n}\right\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő.

(A $\{b_n\}$ tehát konvergens.) (1 pont)

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} 0,75^n=0$, (1 pont)

így $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L}{1+K\cdot 0,75^n}=\frac{L}{1+K\cdot 0}=\boldsymbol{L}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

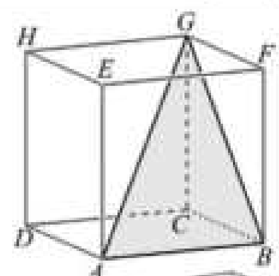
34) Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska" csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek (6 pont)

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete? (Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.) (4 pont)

Az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 10 egység.

c) Számítsa ki az *ABG* háromszög beírt körének sugarát! (6 pont)

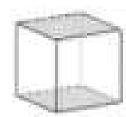


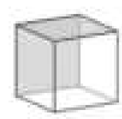
Megoldás:

a) Ha a sárga lapok száma 1, akkor 1 megfelelő kocka van. (1pont)

Ha a sárga lapok száma 2, akkor 2 lehetőség van:

ezek lehetnek egymással szemközti vagy élben szomszédos lapok. (1pont)

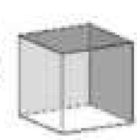




Ha a sárga lapok száma 3, akkor ezek elhelyezkedését tekintve két eset lehetséges:

1. eset: Ha van közöttük két szemközti sárga lap, akkor a forgásszimmetria miatt a harmadik sárga lap egyértelmű, ezért ez 1 színezési lehetőség. (1 pont)

2. eset: Ha nincsenek szemközti sárga lapok, akkor a három sárga lapnak egy közös csúcsa van, tehát ez is 1 színezési lehetőség.(1 pont)



Ha a sárga lapok száma 4 vagy 5, akkor a kék lapok száma rendre 2, illetve 1, így ilyen színezésből is 2, illetve 1 van (ugyanúgy, mint 2, illetve 1 sárga lap esetén). (1 pont)

Összesen $1+2+2+2+1=$**8 különböző kocka készíthető valóban**. (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 62. feladat*

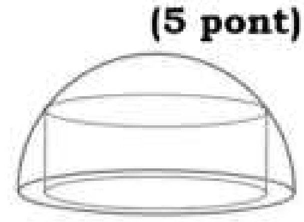
c) *Lásd: Térgeometria 38. feladat*

Összesen: 16 pont

35) Két forgáshenger alakú viaszgyertyánk van. Az egyik gyertya alapkörének sugara *r*, magassága *h*, a másik alapkörének sugara *R*, magassága szintén *h*. A két gyertyát összeolvasztjuk, majd a viaszból egy ugyancsak *h* magasságú, forgáshenger alakú gyertyát öntünk $(r,h,R>0)$.

a) Igazolja, hogy az így kapott gyertya alapkörének sugara legalább $\sqrt{2rR}$. (Az öntés során fellépő anyagveszteségtől eltekinthetünk.) **(5 pont)**

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).



b) Igazolja, hogy az *m* cm magasságú torta térfogata (köbcentiméterben mérve) $225\pi m-\pi m^3$. $(0<m<15)$ **(4 pont)**

c) Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a! **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az összeolvasztás után kapott gyertya V térfogata $V=r^2\pi h+R^2\pi h=\left(r^2+R^2\right)\cdot\pi h$, (1 pont)

alapkörének sugara $\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}=\sqrt{r^2+R^2}$. (1 pont)

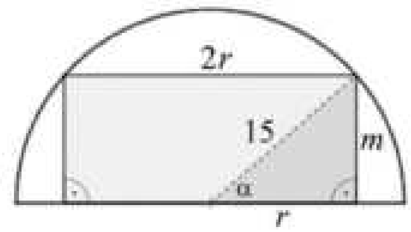
Bizonyítandó, hogy $\sqrt{r^2+R^2}\geq\sqrt{2rR}$. (1 pont)

Négyzetre emelés és rendezés után kapjuk, hogy $r^2+R^2-2rR\geq 0$, azaz $(r-R)^2\geq 0$, ami igaz.

$\sqrt{2}$-vel osztva kapjuk, hogy $\sqrt{\dfrac{r^2+R^2}{2}}\geq\sqrt{rR}$, ami éppen **a két pozitív szám négyzetes és mértani közepe közti egyenlőtlenség, így igaz**.

(Az új gyertya sugara valóban legalább $\sqrt{2rR}$, és egyenlőség csak $r=R$ esetén áll fenn). (2 pont)

b) Az ábra az m magasságú henger forgástengelyén áthaladó egyik síkmetszetét mutatja. A búra sugara 15, a torta alapkörének sugara r $(0<r<15)$.



Ez derüljön ki a válaszból. (1 pont)

Pitagorasz-tétellel: $r^2+m^2=15^2$,

ahonnan $r^2=225-m^2$. (1 pont)

Az *m* magasságú torta térfogata $V=r^2\pi m=\left(225-m^2\right)\pi m=225\pi m-\pi m^3$ valóban. (2 pont)

c) A búra alatt elhelyezhető legnagyobb térfogatú tortát keressük.

A $0 < m < 15$ nyílt intervallumon értelmezett $V(m) = 225\pi m - \pi m^3$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0. $V'(m) = \pi(225 - 3m^2)$.

(1 pont)

$225 - 3m^2 = 0$, azaz $m^2 = 75$, $m = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (ez eleme az értelmezési tartománynak). (1 pont)

$V''(m) = -6\pi m$

Ez negatív, ha $0 < m < 15$, tehát V-nek maximuma van, ha $m = 5\sqrt{3}$. (1 pont)

A maximális térfogatú forgáshenger magasságára $m = 5\sqrt{3} (\approx 8{,}66)$, alapkörének sugarára $r^2 = 225 - 75 = 150$ teljesül, (1 pont)

ezért a maximális térfogat $V_{max} = r^2\pi m = 150\pi \cdot 5\sqrt{3} = 750\pi \cdot \sqrt{3} (\approx 4081)$.

(1 pont)

A félgömb alakú búra térfogata $\dfrac{2 \cdot 15^3 \pi}{3} = 2250\pi (\approx 7069)$, (1 pont)

az alatta elhelyezhető legnagyobb torta térfogata ennek $\dfrac{750\pi \cdot \sqrt{3}}{2250\pi} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\approx \dfrac{4081}{7069}\right) \approx 0{,}577$-szerese, ami valóban kisebb 0,6-nál. Az állítás tehát igaz. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Mivel $m = \sqrt{15^2 - r^2}$, ezért a henger térfogata r függvényében: $V(r) = r^2\pi m = r^2\pi \cdot \sqrt{225 - r^2}$ $(0 < r < 15)$. (1 pont)

A félgömb alakú búra térfogata $\dfrac{2 \cdot 15^3 \pi}{3} = 2250\pi$, (1 pont)

így be kell látni, hogy $\dfrac{r^2\pi \cdot \sqrt{225 - r^2}}{2250\pi} < 0{,}6$. (1 pont)

Rendezés után $r^2 \cdot \sqrt{225 - r^2} < 1350$. (1 pont)

Mivel mindkét oldal pozitív, négyzetre emelhetünk, majd osztunk 4-gyel: $\dfrac{r^2}{2} \cdot \dfrac{r^2}{2} \cdot (225 - r^2) < 455625$. (1 pont)

A bal oldal három pozitív tényezőjére alkalmazzuk a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget: $\dfrac{r^2}{2} \cdot \dfrac{r^2}{2} \cdot (225 - r^2) \le \left(\dfrac{\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{r^2}{2} + (225 - r^2)}{3}\right)^3 = 75^3$

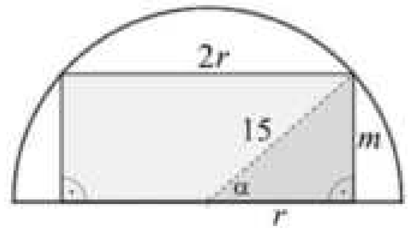
(1 pont)

Egyenlőség csak $\dfrac{r^2}{2} = 225 - r^2$, tehát $r = \sqrt{150}$ esetén van (ez a maximális térfogatú torta sugara).

Mivel $75^3 = 421875 < 455625$, és lépéseink ekvivalensek voltak, az állítást beláttuk. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az ábra jelöléseit használva $m = 15\sin\alpha$ és $r = 15\cos\alpha$.



Az m magasságú torta térfogata:

$V(\alpha) = 225\pi m - \pi m^3 = 3375\pi\left(\sin\alpha - \sin^3\alpha\right)$

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

A búra alatt elhelyezhető legnagyobb térfogatú tortát keressük. (1 pont)

A V függvénynek ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0.

$V'(\alpha) = 3375\pi\left(\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha\right)$ (1 pont)

$\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos\alpha\left(1 - 3\sin^2\right) = 0$

$\cos^3\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha = 0$

$\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\right) = 0$

$\cos\alpha\left(1 - 3\sin^2\alpha\right) = 0$ akkor teljesül, ha $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ (hiszen $\sin\alpha > 0$).

(1 pont)

$\cos\alpha = 0$ nem lehet, mert $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ helyen $V'(\alpha)$ pozitívból negatívba vált, így V-nek itt maximuma van ($\alpha \approx 0{,}6155$ radián). (1 pont)

A maximumhelyen $m = 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}\,(\approx 8{,}66)$, $r^2 = 225 \cdot \frac{2}{3} = 150$,

$V_{\max} = r^2\pi m = 150\pi \cdot 5\sqrt{3} = 750\pi \cdot \sqrt{3}\,(\approx 4081)$ (1 pont)

A félgömb alakú búra térfogata $\frac{2 \cdot 15^3\pi}{3} = 2250\pi\,(\approx 7069)$, (1 pont)

az alatta elhelyezhető legnagyobb torta térfogata ennek $\mathbf{\frac{750\pi \cdot \sqrt{3}}{2250\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\approx \frac{4081}{7069}\right) \approx 0{,}577}$-szerese, ami valóban kisebb 0,6-nél.

Az állítás tehát igaz. (1 pont)

Összesen: 16 pont